P 4

Électronique numérique

4.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Échantillonnage. Analyse spectral numérique. Condition de Shannon.	• *Mettre en évidence le phénomène repliement de spectre dû à l'échantillonnage lors de l'utilisation d'un oscilloscope numérique ou d'une carte d'acquisition.* • *Choisir les paramètres (durée, nombre d'échantillons, fréquence d'échantillonnage) d'une d'acquisition numérique afin de respecter la condition de Shannon.*
Filtrage numérique.	• *Réaliser un filtrage numérique passe-bas d'une acquisition.*
Détecteurs. Intensité lumineuse. Facteur de contraste.	• Exploiter la propriété qu'un capteur optique quadratique fournisse un signal proportionnel à l'énergie lumineuse reçue pendant son temps d'intégration. • Citer l'ordre de grandeur du temps d'intégration de quelques capteurs optiques.

Ce chapitre fait suite et rappelle quelques notions vues en première année en Sciences Industrielles dans le chapitre *Traitement de l'information*. Vous pourrez vous y reporter avec intérêt.

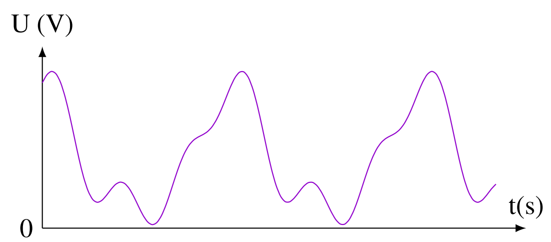
4.2 Analogique et numérique

4.2.1 Quelques définitions

— Signal —

Exemples : tension électrique (en V), température (en $^\circ$C), niveau sonore (en dB), pH (sans unité), ...

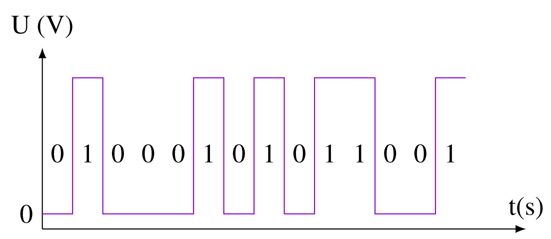
— Signal analogique —



Analogique est ici le contraire de logique, l'art de manipuler des 0 et des 1.

— Signal numérique —

Un signal **numérique** est une suite de 0 et de 1 logiques :



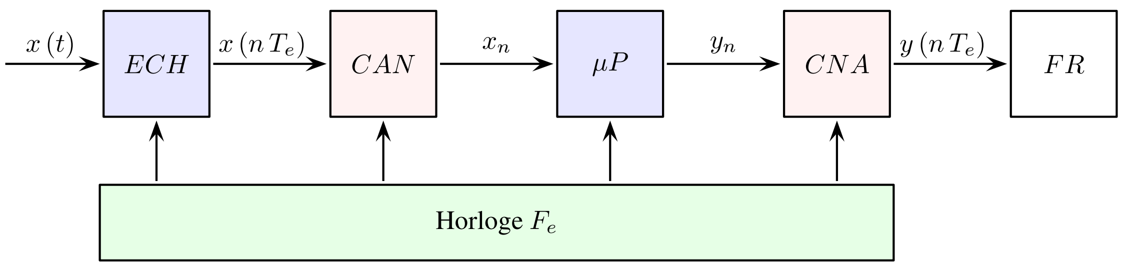
— Enregistrement numérique —

L'enregistrement numérique consiste à convertir le signal électrique en une suite de nombres dont chacun représente l'amplitude instantanée du signal originel à un instant significatif donné, puis à enregistrer ces nombres après un codage qui permet de détecter, à la lecture, un défaut éventuel.

4.2.2 Avantages de l'enregistrement numérique

- L'enregistrement numérique est beaucoup plus tolérant que son équivalent analogique au niveau du support d'enregistrement.
- Il permet de rendre indépendant le signal de la distance : lorsqu'un signal analogique est transporté sur un canal de transmission, il subit de nombreuses modifications, comme l'atténuation ou l'ajout de bruit, qui affectent la qualité de cette transmission. À l'arrivée, après amplification, le signal originel est mêlé à du bruit, ce qui dans certains cas, rend difficile la compréhension du message.
  Les signaux numériques ne prenant que deux valeurs, "0" ou "1", le bruit occasionné par les canaux de transmission peut être enlevé de manière simple et efficace. Le signal arrivant est une réplique exacte du message d'origine, d'où une qualité sans équivalent.
- L'enregistrement numérique permet également de pouvoir facilement multiplexer sur un même canal de transmission plusieurs signaux de voix, qui sont agrégés sur un même lien physique.
- Il permet de bénéficier des développements et progrès informatiques.
- Il est moins coûteux.

4.2.3 La chaîne de transformation



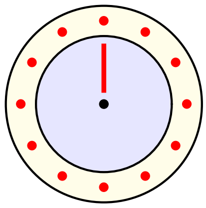
- $x(t)$ représente l'entrée,
- Le premier bloc ECH représente l'échantillonnage, c'est-à-dire le choix de dates auxquelles prélever au signal analogique des valeurs discrètes. T_e est la période d'échantillonnage du signal.
- Le deuxième bloc CAN représente un convertisseur analogique-numérique qui permet d'associer un nombre binaire à une valeur du signal analogique. Ce sont ces nombres qui seront traités par la machine.
- μP représente le traitement numérique qui peut, par exemple, être un filtrage ou une analyse spectrale.
- Les valeurs binaires y_n obtenues sont à reconvertir en valeurs discrètes associées à des temps nT_e par l'intermédiaire d'un convertisseur numérique-analogique CNA.
- Il reste alors à réaliser l'opération inverse de l'échantillonnage, ce que réalise le filtre de restitution FR.

Les opérations précédentes sont cadencées par une horloge de fréquence F_e, où F_e correspond à la fréquence d'échantillonnage.

4.3 Stroboscopie

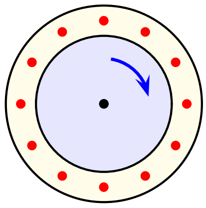
4.3.1 Principe

Faisons tourner un disque autour de son axe principal. Sur ce disque est tracé un repère constitué d'un trait suivant un de ses rayons.
Afin de noter précisément sa position, on considère un autre disque, plus grand, fixe, sur lequel sont dessinés 12 points, comme sur une horloge.
Lorsque le petit disque est immobile, on est dans la situation suivante :



Un stroboscope est un appareil qui émet des flashs lumineux à une fréquence réglable. On supposera pour la suite que les durées mises en jeu sont grandes devant la persistance rétinienne, de façon à ce que l'observateur n'ait pas un sentiment de continuité. Ainsi, le mouvement paraîtra saccadé.

Notons f_D la fréquence de rotation du disque et f_S la fréquence d'émission du stroboscope.
Considérons la rotation du petit disque dans le sens horaire et une fréquence du stroboscope très supérieure à celle de la rotation du disque.



En notant T_D la période de rotation et T_S l'intervalle de temps entre 2 flashs successifs, on verra alors :

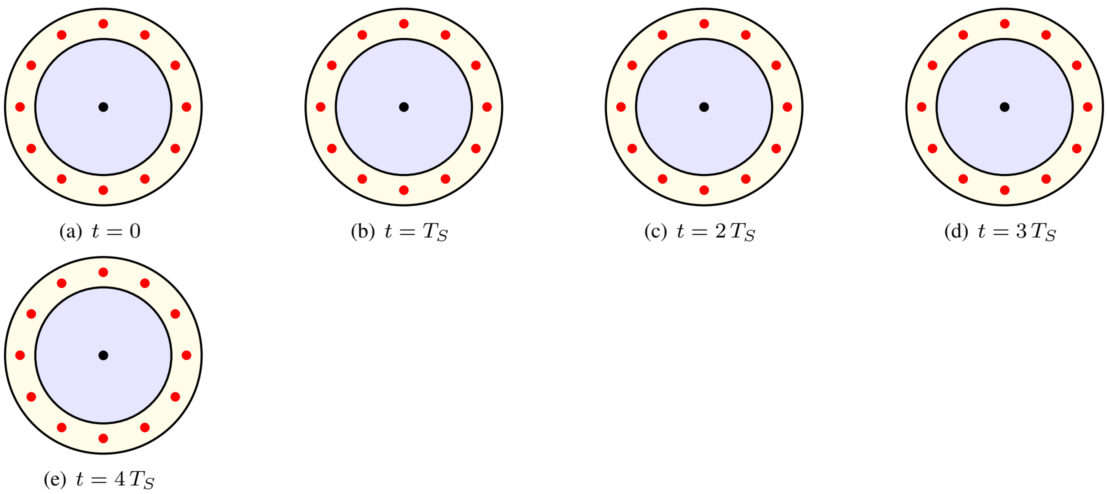
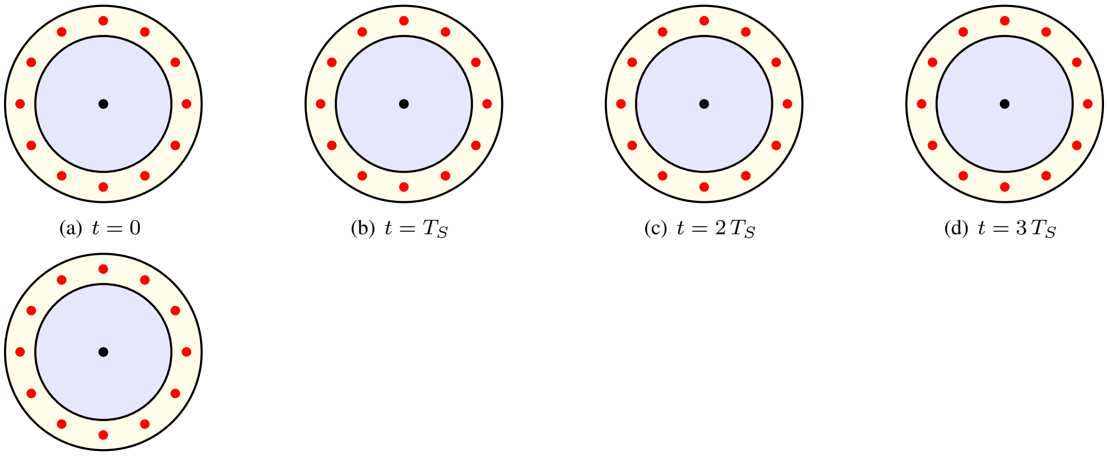


FIGURE 4.1 – Observation du disque avec le stroboscope pour $f_S = 12\,f_D$

4.3.2 Influence de la fréquence du stroboscope

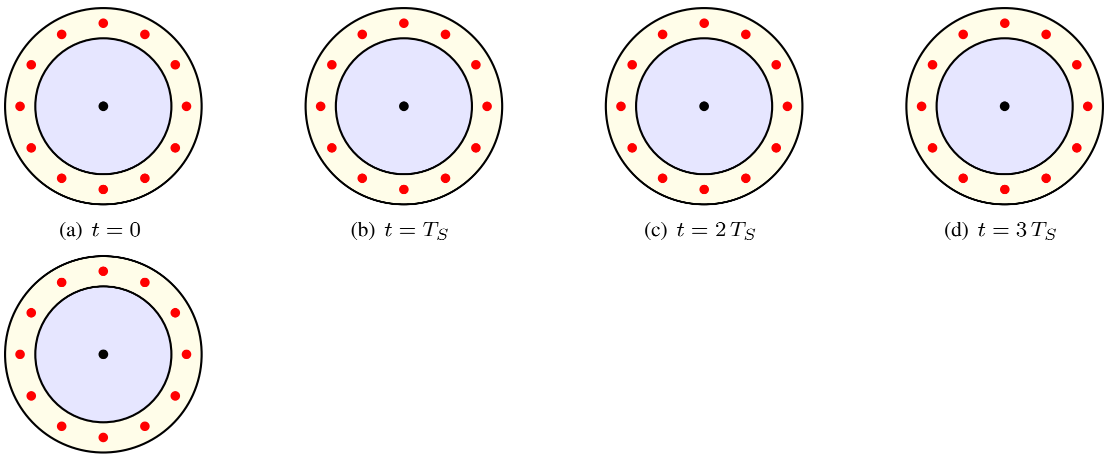
Si la fréquence d'émission du stroboscope est égale à la fréquence de rotation du disque (ou plus généralement si la fréquence de rotation du disque est un multiple p de celle du stroboscope), alors le disque a le temps d'effectuer un tour (ou plusieurs) dans l'intervalle de temps entre 2 flashs successifs et celui-ci restera immobile. Ainsi, on observera dans ce cas :



(a) $t = 0$ (b) $t = T_S$ (c) $t = 2\,T_S$ (d) $t = 3\,T_S$ (e) $t = 4\,T_S$

FIGURE 4.2 – Observation du disque avec le stroboscope pour $f_S = \dfrac{1}{p}\,f_D, p \in \mathbb{N}$

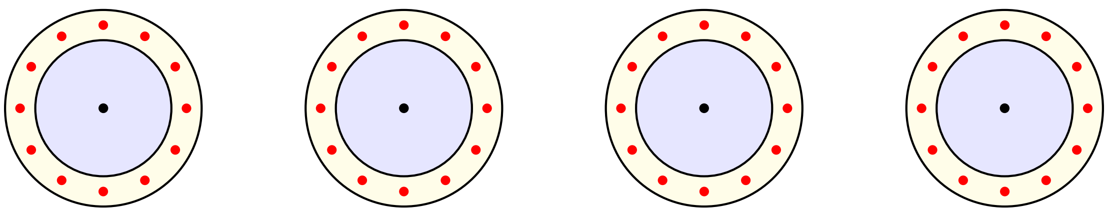
De la même façon, si la fréquence du stroboscope est égale à 2 fois celle de rotation du disque, ce dernier aura le temps d'effectuer un demi-tour entre 2 flashs successifs :



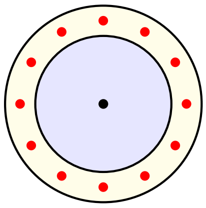
(a) $t = 0$ (b) $t = T_S$ (c) $t = 2\,T_S$ (d) $t = 3\,T_S$ (e) $t = 4\,T_S$

FIGURE 4.3 – Observation du disque avec le stroboscope pour $f_S = 2\,f_D$

Si on prend $f_D = \dfrac{11}{12}\,f_S$, on a alors $T_S = \dfrac{11}{12}T_D$: entre 2 flashs successifs, le disque n'a pas tout-à-fait le temps d'effectuer un tour. On est alors dans la configuration suivante :



(a) $t = 0$ (b) $t = T_S$ (c) $t = 2\,T_S$ (d) $t = 3\,T_S$



(e) $t = 4\,T_S$

FIGURE 4.4 – Observation du disque avec le stroboscope pour $f_S = \dfrac{12}{11}\,f_D$

On voit dans cet exemple que les images observées ne correspondent plus du tout au sens de rotation réelle du disque.
C'est ce que l'on peut voir pour les roues de voiture dans des films ou dans la rue à la lumière de l'éclairage public.

4.4 Échantillonnage

— Échantillonnage —

L'échantillonnage d'un signal analogique $s_a\,(t)$ consiste à multiplier le signal $s_a\,(t)$ par une fonction peigne de Dirac constituée d'impulsions très courtes se répétant périodiquement. Cette répétition est caractérisée par la fréquence d'échantillonnage notée F_e.

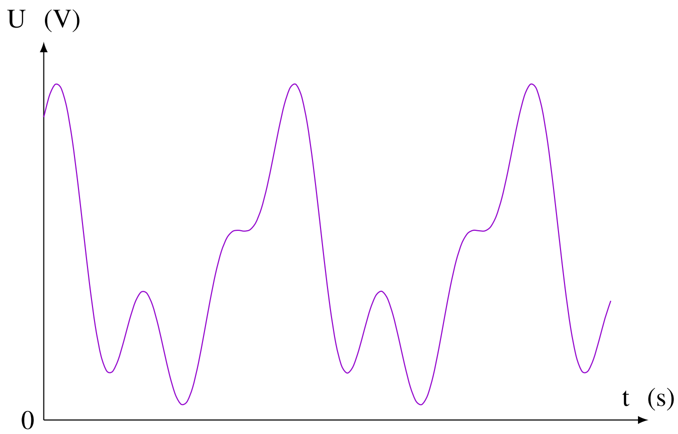
4.4.1 Mise en œuvre

Comme dans le cas précédent, on échantillonne donc un signal analogique $s_a\,(t)$ en relevant sa valeur à intervalles de temps réguliers. La durée entre 2 intervalles successifs est appelé période de l'échantillonnage et est notée T_e. On récupère alors des valeurs du signal $s_a\,(t)$ à chaque instant défini par $t_n = n\,T_e$, avec $n \in \mathbb{Z}$.
On a alors :

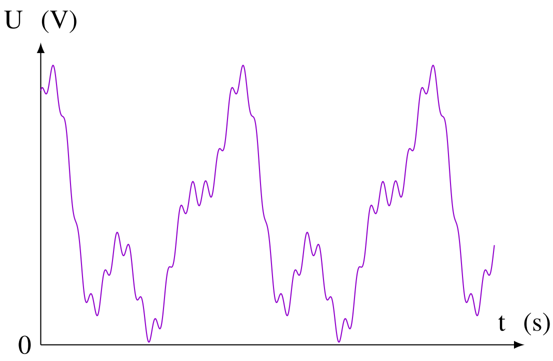
$$s_n\,(t) = s_a\,(t_n) = s_a\,(n\,T_e)$$

4.4.2 Intérêt.

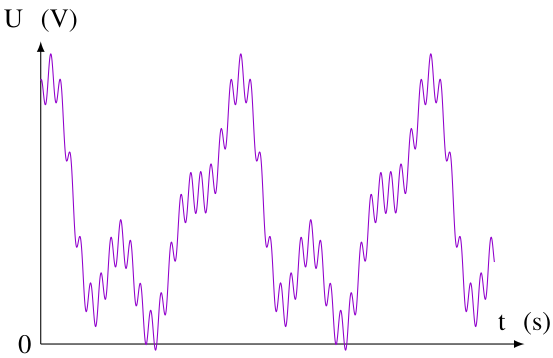
L'intérêt principal est de supprimer le bruit.
Celui-ci a pour origine l'agitation thermique des électrons libres (transmetteurs du signal) dans les circuits électriques et surtout les perturbations dues aux ondes électromagnétiques dans lesquelles nous baignons.
Alors, à partir du signal analogique suivant :



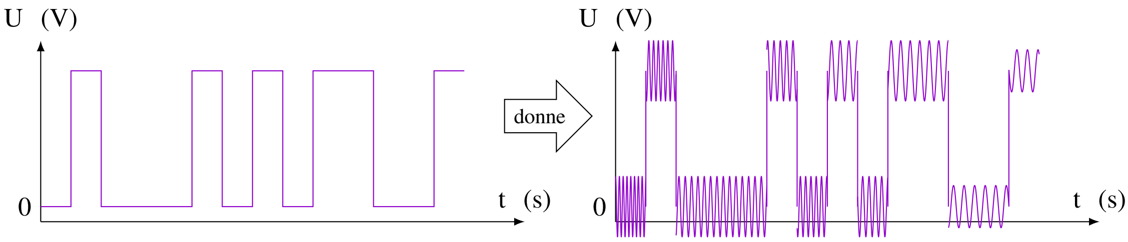
On peut obtenir :



Si le signal est trop faible, on peut même ne plus rien reconnaître du tout :



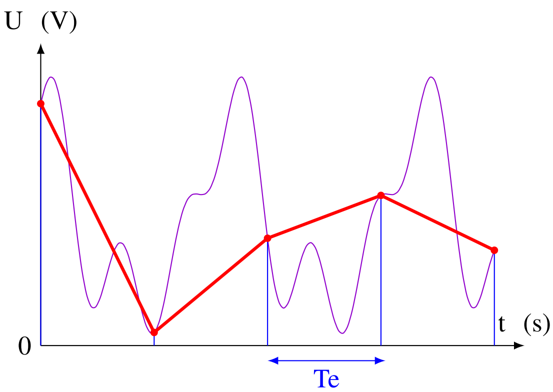
Il est donc impossible de transmettre un tel signal !
En numérique, le signal étant composé de 0 et de 1, le bruit de fond a une influence plus limitée :



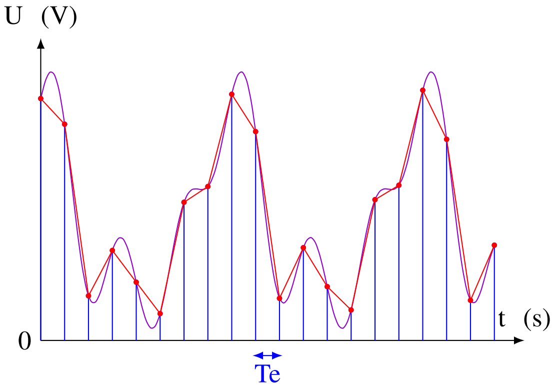
Malgré le bruit, on reconnaît quand même les 0 et les 1 ...

4.4.3 Fréquence d'échantillonnage

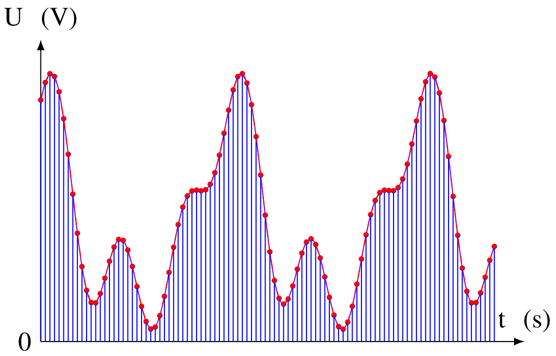
La fréquence d'échantillonnage $F_e = \dfrac{1}{T_e}$ correspond au nombre d'échantillons prélevés par unité de temps.
On peut ainsi faire le parallèle avec la fréquence du stroboscope.
On cherche bien sûr à diminuer autant que possible cette fréquence d'échantillonnage, tout en ne perdant pas de vue que les échantillons, mis bout à bout, doivent restituer le signal le plus fidèlement possible.
Ainsi, on ne pourra pas descendre en-deçà d'une certaine limite :



Ici, la courbe rouge ne représente pas du tout le signal original. Il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage f_e et donc diminuer la période T_e :



ou mieux :



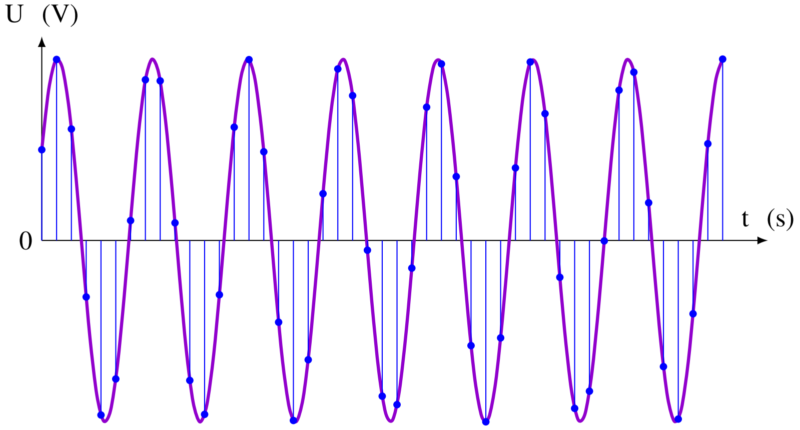
Plus la fréquence d'échantillonnage sera grande, plus la mesure sera précise et plus le signal pourra être restitué fidèlement. Mais cela demande un espace mémoire conséquent en raison du grand nombre de données à traiter.

4.4.4 Spectre du signal échantillonné

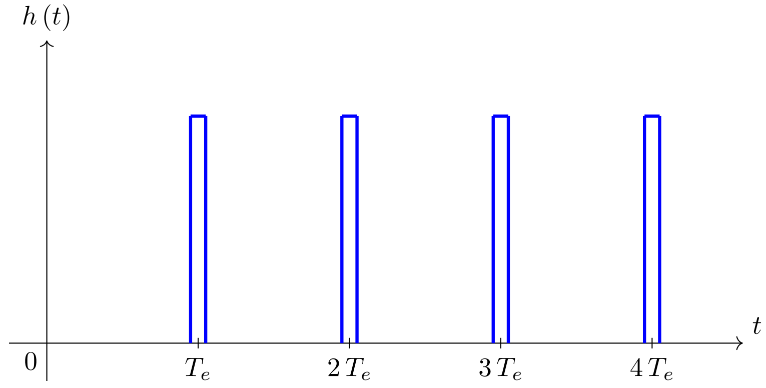
4.4.4.1 Signal monochromatique

— Signal monochromatique —

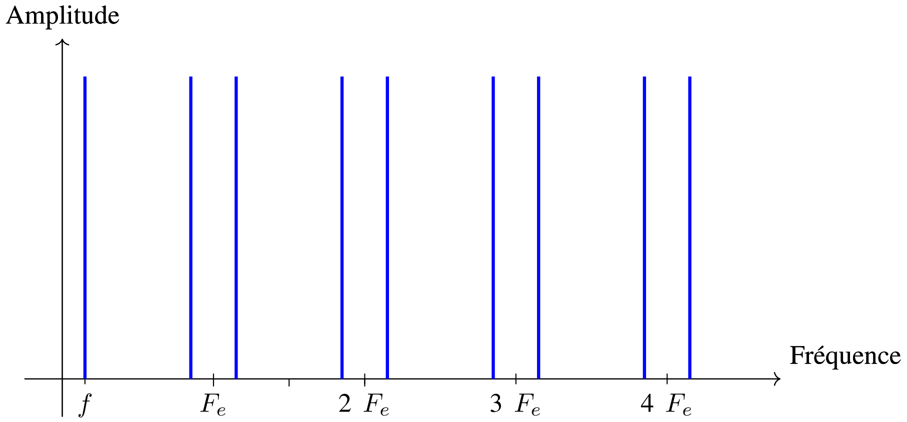
Considérons un signal sinusoïdal $s_a(t)$ de fréquence $f = 300\,Hz$, donc de période $T = 3{,}33\,ms$, échantillonné à l'aide d'un signal impulsionnel de fréquence $F_e = 2{,}00\,kHz$.



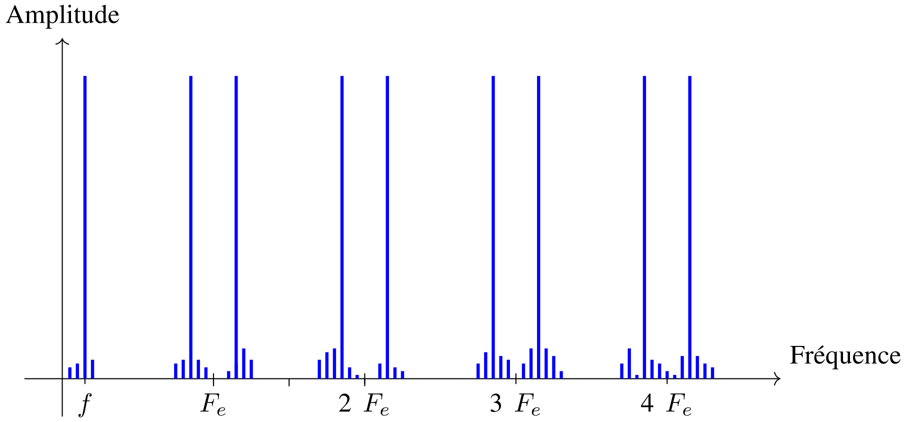
Pour réaliser de façon pratique un échantillonnage, on multiplie le signal analogique par ce que l'on appelle un train d'impulsion de Dirac :



Le spectre du signal $s_e(t)$ théorique est formé de raies :



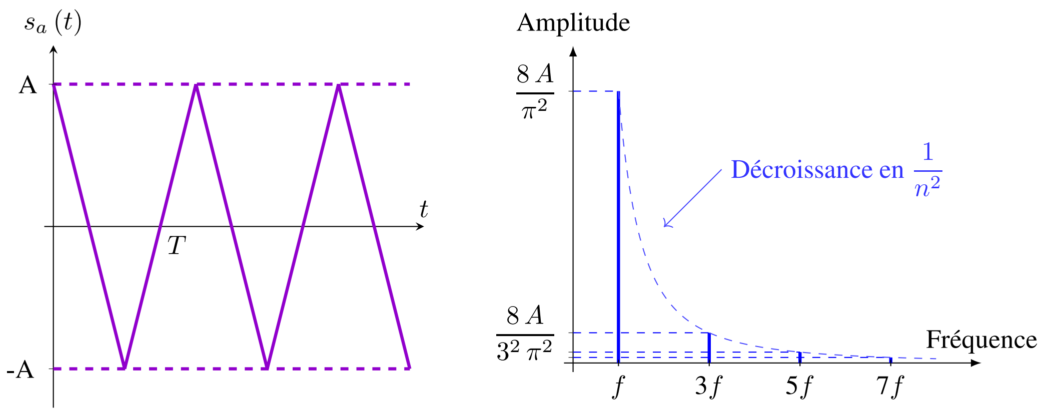
Dans la pratique, d'autres petites raies apparaissent : elles sont produites par les imperfections de la numérisation, on les appelle des artefacts :



4.4.4.2 Signal polychromatique

— Signal polychromatique —

Voici un exemple de signal ainsi que son spectre :



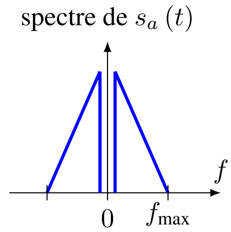
(a) Signal triangulaire (b) Spectre correspondant

FIGURE 4.5 – Signal polychromatique

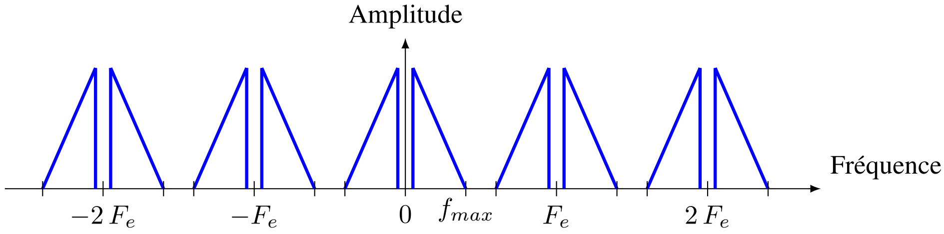
En effet, la décomposition en série de Fourierr de ce signal triangulaire (pair) s'exprime de la façon suivante :

$$s_a\,(t) = \frac{8\,A}{\pi^2}\,[\cos(\omega\,t) + \frac{1}{3^2}\,\cos(3\,\omega\,t) + \frac{1}{5^2}\,\cos(5\,\omega\,t) + \ldots] = \frac{8\,A}{\pi^2}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)\,\omega\,t]}{[(2n+1)\,\pi]^2}]$$

Schématiquement, on peut représenter le spectre d'un signal de la façon suivante :



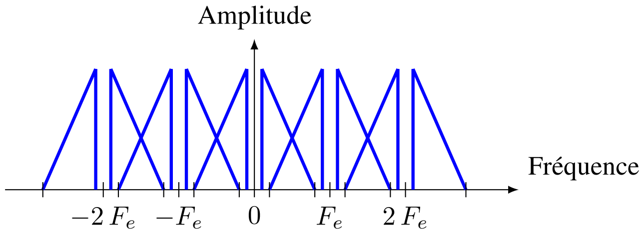
Ainsi, le spectre du signal échantillonné se présentera sous la forme suivante :



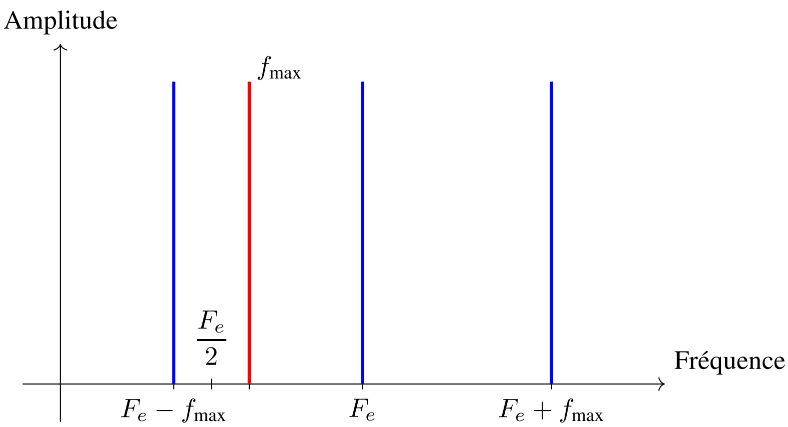
Un simple filtre passe-bas permet alors de retrouver le signal $s_a\,(t)$.

4.4.5 Repliement de spectre

Si la fréquence d'échantillonnage est insuffisante, on observe alors la configuration suivante :



On constate ici que les intervalles spectraux ne sont plus disjoints. Dans ce cas, il ne sera plus possible d'analyser le signal échantillonné et de retrouver le signal $s_a(t)$.
On parle alors de repliement de spectre (ou "aliasing") : certaines raies spectrales répliquées autour de la fréquence F_e empiètent sur l'intervalle de fréquence $[0, f_{\text{max}}]$ occupé normalement par le spectre du signal $s_a\,(t)$ d'origine :



4.4.6 Condition de Shannon

Avec l'exemple précédent, on voit que pour éviter le recouvrement des spectres, il faut que f_{max} soit inférieure à $\frac{F_e}{2}$.

La condition pour que les intervalles spectraux soient disjoints est appelée condition de Nyquist-Shannon :

— Exemples —

- Les signaux téléphoniques ont leur spectre limité à environ $3{,}4\,kHz$ et sont échantillonnées à $8{,}0\,kHz$.
- Les signaux musicaux possèdent une fréquence maximale à $20\,kHz$. Leur fréquence d'échantillonnage minimale d'échantillonnage est $F_e \simeq 44\,kHz$.

4.4.7 Retour sur la stroboscopie

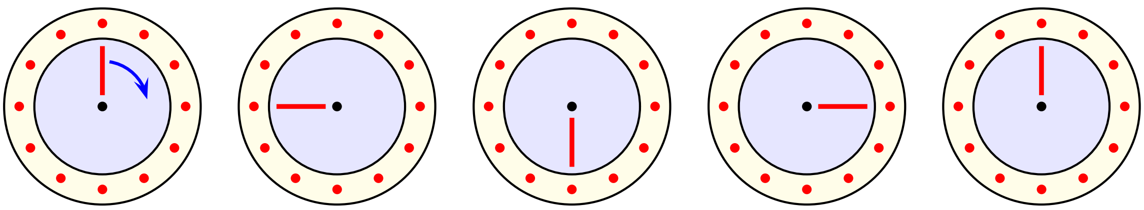
Considérons un signal de fréquence f échantillonné à l'aide d'une fréquence d'échantillonnage F_e telle que :

$$f = \frac{3}{4}F_e$$

La raie repliée possède une fréquence f' telle que :

$$f' = F_e - f = \frac{4}{3}\,f - f = \frac{1}{3}\,f = \frac{1}{4}\,F_e$$

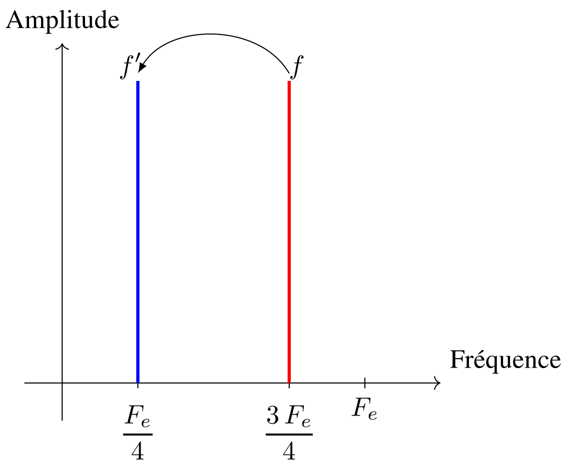
Pour le stroboscope, cela revient à utiliser une fréquence du stroboscope $f_S = \dfrac{4}{3}\,f_D$ ou en terme de durée, cela signifie que $T_S = \dfrac{3}{4}\,T_D$: le disque a le temps d'effectuer $\dfrac{3}{4}$ de tour entre 2 flashs successifs.
Illustrons cette situation à l'aide d'un schéma :



(a) $t = 0$ (b) $t = T_S$ (c) $t = 2\,T_S$ (d) $t = 3\,T_S$ (e) $t = 4\,T_S$

FIGURE 4.6 – Observation du disque avec le stroboscope pour $f_S = \dfrac{4}{3}\,f_D$

Il faut donc 4 flashs pour que le mouvement apparent effectue un tour, ce qui correspond à une vitesse de rotation du disque, exprimée en nombre de tours par seconde, égale à $\dfrac{1}{4}\,F_S$: il s'agit de la fréquence de la raie repliée $f' = \dfrac{1}{4}\,F_e$:



4.4.8 Conclusion

On voit que l'échantillonnage, comme toute opération non linéaire que constitue ici la multiplication du signal d'origine par le peigne de Dirac, enrichit le spectre. En effet, des fréquences nouvelles apparaissent dans le spectre s_e. Cette apparition n'est évidement pas souhaitée et il faudra les éliminer.

4.5 Quantification

— Quantification —

La quantification va attribuer à chaque échantillon une valeur numérique selon un principe de proportionnalité. Ainsi, tout convertisseur analogique-numérique (CAN) a besoin d'une valeur de référence (en général la masse) et d'une valeur seuil qui sera choisie en fonction de la précision voulue.

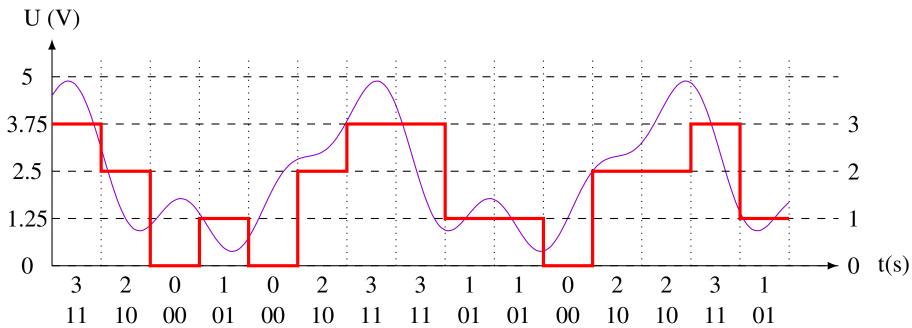
Par exemple, si on a un convertisseur 16 bits, qu'on utilise la masse comme référence et $5\,V$ comme valeur du seuil, on aura une précision de $\dfrac{5}{65536} \simeq 76\,\mu V$, ce qui signifie qu'une variation d'une unité numériquement parlant équivaudra à une variation analogique de $76\,\mu V$. Le nombre de valeurs possibles avec 16 bits vaut donc $65536 = 2^{16}$.

Deux facteurs vont jouer sur la qualité du signal :

- La fréquence d'échantillonnage. En effet, plus elle sera élevée plus le signal numérisé sera fidèle au signal analogique initial. Une fréquence trop élevée demandera cependant un espace mémoire très important.
- Le nombre de bits sur lequel on code les valeurs qui va nous donner le nombre de valeurs que peut prendre un échantillon et la précision en fonction de la valeur seuil.

Il faut découper le signal en amplitude et attribuer un nombre entier aux différentes valeurs de la tension.
Comme l'ordinateur "travaille" en binaire, on divise la tension par une puissance de 2.
Dans les exemples suivants, on prendra toujours la même fréquence d'échantillonnage.
La tension varie entre $0\,V$ et $5\,V$ et la valeur numérique attribuée est immédiatement supérieure à la valeur réelle.
Codé sur 2 bits, on obtient les correspondances :

tension (V)	Décimal	Binaire
0	0	00
1,25	1	01
2,5	2	10
3,75	3	11



On appelle pas, la différence de tension entre deux valeurs successives.

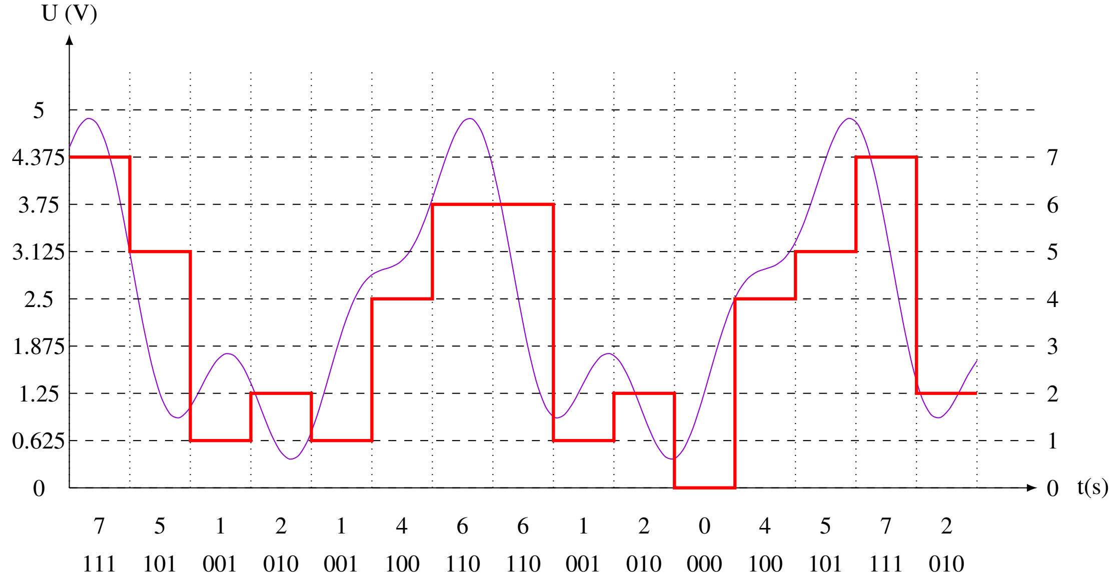
Il dépend du nombre n de bits utilisés pour le codage ainsi que de la valeur de la tension maximale $U_{\max}$:

$$\boxed{p = \frac{U_{\max}}{2^n}}$$

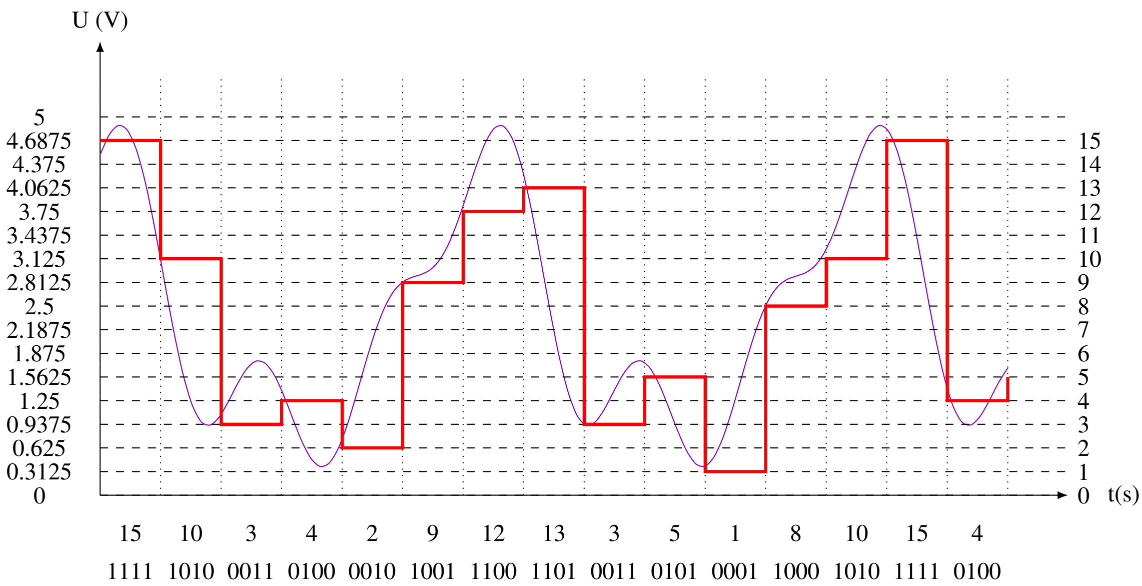
Le signal rouge est la restitution en tension du signal numérique. Il n'est pas ici très ressemblant au signal analogique . . .

Il faut donc effectuer un découpage plus fin.

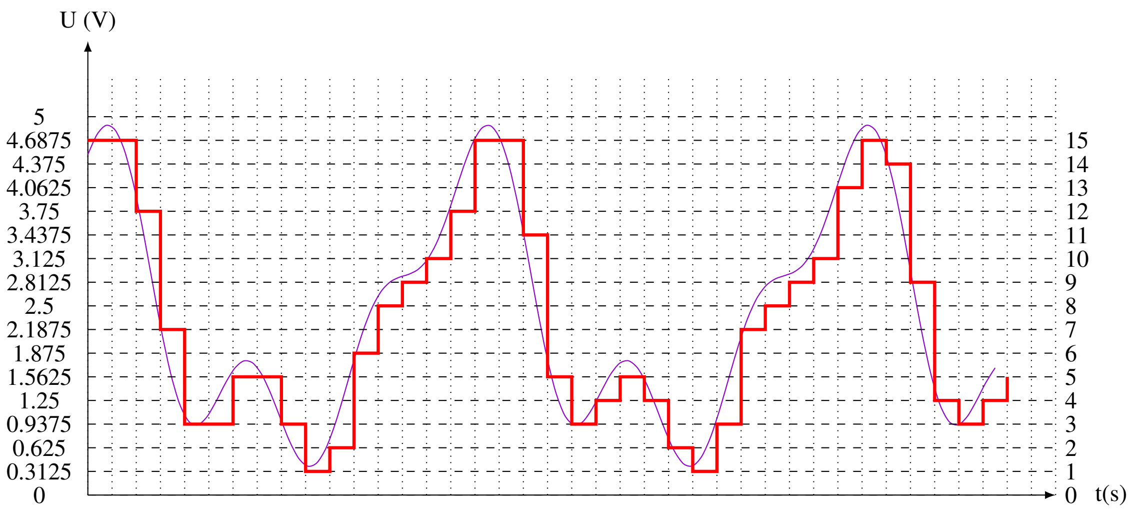
Sur 3 bits, on obtient :



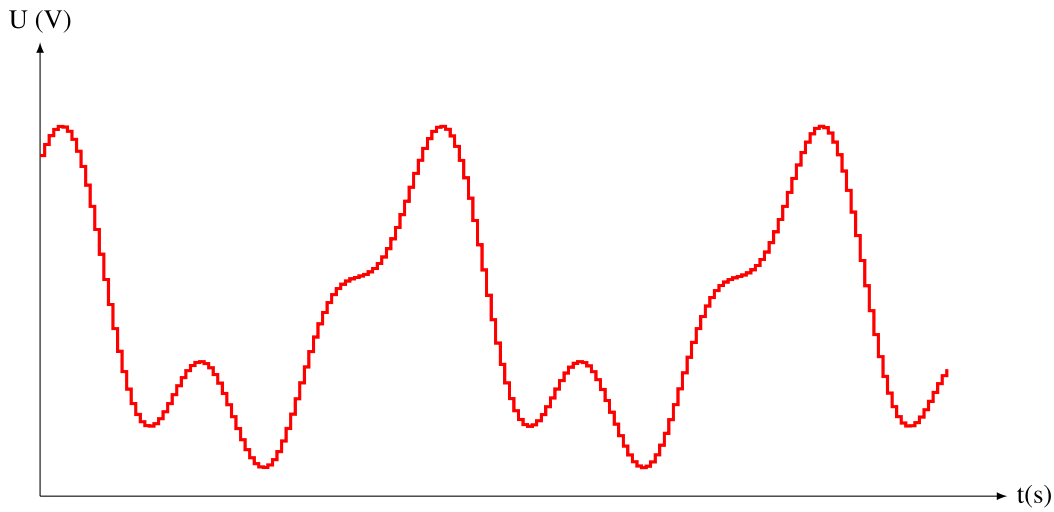
Sur 4 bits, on a :



Même si le signal rouge s'approche un peu de signal réel, la ressemblance n'est tout de même pas frappante : il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage et diminuer le pas.



Finalement, le signal pourrait ressembler à :



Les ordinateurs actuels codent les informations sur 64 voire 128 bits, c'est à dire une suite de 64 ou 128 zéros ou uns par échantillon et à des fréquences avoisinant le GHz.

Cela laisse imaginer le nombre d'informations à stocker !

4.6 Filtrage

Une fois le signal échantillonné, il faut se débarrasser des composantes inutiles. En effet les spectres créés autour des différents multiples de la fréquence d'échantillonnage sont gênants. Pour les éliminer, on utilise en général un filtre passe-bas analogique dont la fréquence de coupure f_c est inférieure à $\frac{F_e}{2}$, qui va supprimer les harmoniques supérieurs à cette fréquence.